# Penggunaan Lintasan Euler pada penyelesaian Teka-teki *The Ragnarok Riddle*

Habibina Arif Muzayyan 13519125
*Program Studi Teknik Informatika*
*Sekolah Teknik Elektro dan Informatika*
*Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia*
*13519125@std.stei.itb.ac.id*

***Abstract*—*The Ragnarok Riddle* adalah sebuah teka-teki dari Daniel Finkel. Teka-teki ini dapat diselesaikan dengan salah satu aplikasi graf yaitu lintasan euler. Tujuan dari teka-teki ini adalah mencari lintasan untuk membelah seluruh tubuh monster ular besar Jörmungandr. Lintasan yang sudah dilalui tidak bisa dilewati lagi, tetapi kita bisa menyeberanginya pada persimpangan. Adapun, bentuk tubuh Jörmungandr menyatu menjadi tubuh kontinu, tidak punya kepala dan ujung ekor. Bentuk tubuh Jörmungandr dapat dimodelkan sebagai graf planar dengan tubuhnya sebagai sisi dan persimpangan tubuh sebagai simpul.**

***Keywords*—Aplikasi Graf, Lintasan Euler, *Ragnarok Riddle*.**

## I. Pendahuluan

Graf adalah suatu cabang ilmu matematika diskrit yang merepresentasikan objek-objek diskrit sebagai simpul dan hubungan antar objek sebagai sisi dengan setiap sisinya menghubungkan dua simpul. Graf memiliki banyak aplikasinya salah satunya adalah lintasan euler.

Lintasan euler adalah lintasan dalam graf yang melalui setiap sisinya tepat satu kali. Jika simpul akhir lintasan euler sama dengan simpul awal lintasannya, maka ini disebut dengan sirkuit euler. Graf yang memiliki lintasan euler disebut dengan graf semi-euler. Graf yang memiliki sirkuit euler disebut dengan graf euler.

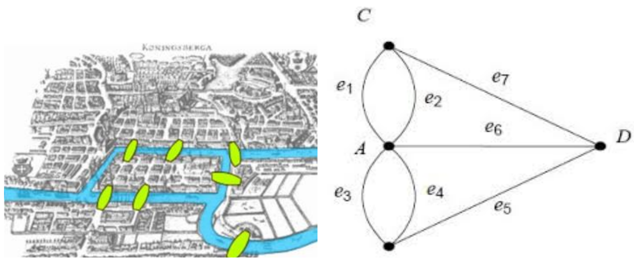
Lintasan euler dan sirkuit euler ditemukan oleh Leonhard Euler ketika mengamati tujuh jembatan Königsberg pada tahun 1736. Euler mengatakan bahwa kita tidak bisa mengelilingi kota Königsberg dengan menyeberangi setiap jembatannya tepat satu kali. Dari permasalahan jembatan Königsberg inilah, dasar teori graf berkembang pesat dalam ilmu matematika diskrit.

Banyak manfaat yang dapat diambil dari lintasan euler. Salah satunya adalah penyelesaian beberapa teka-teki. Salah satu teka-teki yang penyelesaiannya menggunakan lintasan euler adalah *The Ragnarok Riddle* dari Daniel Finkel.

## II. Landasan Teori

### A. Graf

Graf merupakan struktur data diskrit yang mempunyai 2 komponen utama yaitu simpul (*node/vertice*) yang menyatakan objek dan sisi (*edge*) yang menyatakan hubungan antara 2 objek. Sejarah dasar graf bermula ketika seorang matematikawan swiss yang bernama Leonhard Euler mengamati tujuh jembatan Königsberg pada tahun 1736. Tujuh jembatan Königsberg terletak di sebuah kota yang bernama Königsberg. Tujuh jembatan tersebut menyeberangi sungai Pregolya dan menghubungkan wilayah-wilayah di kota Königsberg. Secara geografis, Königsberg memiliki 4 wilayah daratan dan dihubungkan dengan 7 jembatan. Permasalahan ini dapat dimodelkan sebagai graf dengan simpul merepresentasikan daratan dan sisi merepresentasikan jembatan.




Gambar 2.1 Representasi tujuh jembatan Königsberg sebagai graf

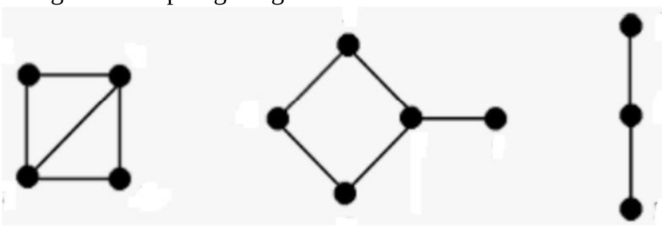
Graf dapat didefinisikan sebagai notasi $G = (V,\ E)$ dengan $V$ (*vertices*) menyatakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul $\{v_1,\ v_2, \dots, v_n\}$ dan $E$ (edges) menyatakan himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul $\{e_1,\ e_2, \dots, e_n\}$. Perhatikan bahwa $V$ adalah himpunan tak kosong dan $E$ adalah himpunan boleh kosong. Akibatnya, suatu graf tidak memungkinkan hanya memiliki sisi, tetapi harus memiliki minimal satu simpul. Graf yang hanya terdiri dari satu simpul dan tidak memiliki sisi dinamakan dengan graf trivial.

Dalam teori graf, terdapat istilah sisi ganda (*multiple edges* atau *parallel edges*) dan gelang atau kalang (*loop*). Sisi ganda adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan sepasang simpul yang sama. Gelang atau kalang adalah sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Pada graf jembatan Königsberg, graf memiliki 2 buah sisi ganda yaitu $(e_1, e_2)$ karena keduanya menghubungkan sepasang simpul yang sama yaitu simpul $A$ dan simpul $C$, dan $(e_3, e_4)$ yang menghubungkan sepasang simpul yang sama yaitu simpul $A$ dan $B$. Graf tersebut tidak memiliki gelang atau kalang karena tidak ada sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

## B. Jenis-jenis Graf

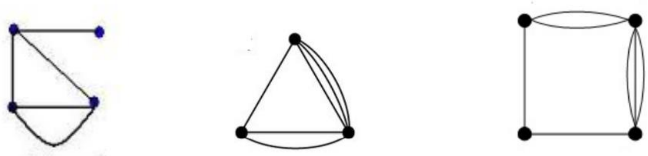
Graf dapat dikelompokkan dalam berbagai jenis. Berdasarkan ada atau tidaknya gelang atau sisi ganda graf dapat dikelompokkan menjadi 2, yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak-sederhana (*unsimple-graph*).

1. Graf sederhana (*simple graph*)
   Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun gelang.



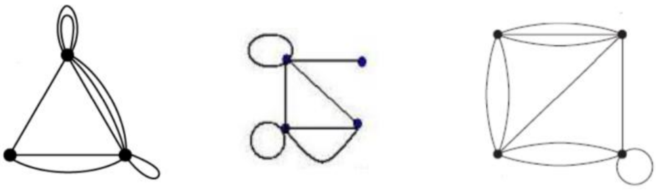
Gambar 2.2 Contoh graf sederhana

2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*)
   Graf tak-sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak-sederhana dapat dikelompokkan lagi menjadi 2, yaitu graf ganda (*multi-graph*) dan graf semu (*pseudo graph*).
   a.) Graf ganda (*multi-graph*)
   Graf ganda merupakan graf yang mengandung sisi ganda.



Gambar 2.3 Contoh graf ganda

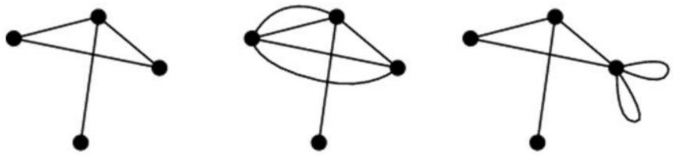
   b.) Graf semu (*pseudo graph*)
   Graf semu merupakan graf yang mengandung gelang.



Gambar 2.4 Contoh graf ganda

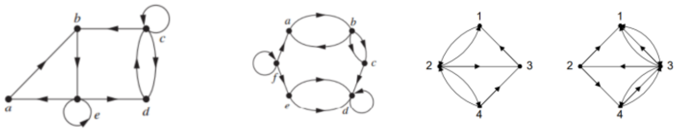
. Berdasarkan orientasi arah pada sisi graf dapat dikelompokkan menjadi 2, yaitu graf tak-berarah (*undirected graph*) dan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*).

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)
   Graf tak-berarah merupakan graf yang tidak mempunyai orientasi arah.



Gambar 2.5 Contoh graf tak-berarah

2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)
   Graf berarah merupakan graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.



Gambar 2.6 Contoh graf berarah

## C. Terminologi Graf

Terdapat beberapa terminologi (istilah) yang digunakan pada graf, Berikut ini terminologi yang biasa digunakan:

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)
   Dua buah simpul disebut *bertetangga* jika terdapat sisi yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

2. Bersisian (*Incidency*)
   Jika sebuah sisi dalam graf menghubungkan dua simpul u dan v, maka sisi tersebut dapat dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v.

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)
   Jika sebuah simpul tidak memiliki sisi yang bersisian dengan simpul tersebut, maka simpul tersebut dapat dikatakan simpul terpencil.

4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)
   Graf kosong adalah graf yang memiliki beberapa simpul, tetapi tidak ada sisi yang menghubungkan semua simpul tersebut, atau graf yang himpunan simpulnya adalah himpunan kosong.

5. Derajat (*Degree*)
   Derajat suatu simpul adalah jumlah dari sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Notasi untuk derajat suatu simpul $V$ adalah d(V). Derajat dari simpul terpencil adalah 0. Pada graf berarah, derajat simpul dibedakan menjadi dua yaitu derajat masuk (*in-degree*) dan derajat keluar (*out-degree*). Notasi derajat simpul $V$ pada graf berarah adalah $d_{in}(V)$ untuk derajat masuk dan $d_{out}(V)$ untuk derajat keluar.

6. Lintasan (*Path*)
   Lintasan yang memiliki panjang $n$ dari simpul awal $v_0$ ke simpul tujuan $v_n$ pada graf $G$ adalah barisan berselang antara simpul dan sisi, yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, …, $e_1 = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-

sisi dari graf G. Panjang lintasan adalah jumlah sisi yang dilalui dalam lintasan tersebut. Lintasan ini tidak memiliki aturan kembali, sehingga suatu simpul atau sisi yang dilalui dalam sebuah lintasan dapat diulang kembali atau muncul lebih dari sekali. Terdapat beberapa jenis lintasan, diantaranya:

a. Lintasan sederhana
Lintasan sederhana adalah lintasan yang semua simpulnya berbeda, atau setiap sisinya hanya dilalui tepat sekali.

b. Lintasan tertutup
Jika suatu lintasan berawal dan berakhir pada simpul yang sama, maka lintasan tersebut adalah lintasan tertutup.

c. Lintasan terbuka
Jika suatu lintasan berawal dan berakhir pada simpul yang berbeda, maka lintasan tersebut adalah lintasan terbuka.

7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)
Siklus atau sirkuit adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi yang dilalui dalam sirkuit tersebut.

8. Keterhubungan (*Connected*)
Dua buah simpul $v_1$ dan simpul $v_2$ disebut terhubung jika terdapat lintasan dari $v_1$ ke $v_2$. Graf $G$ disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul $v_i$ dan $v_j$ dalam himpunan $V$ terdapat lintasan dari $v_i$ ke $v_j$. Jika tidak, maka G disebut graf tak-terhubung (*disconnected graph*).

9. Upagraf (*subgraph*) dan Komplemen Upagraf
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf (*subgraph*) dari $G$ jika $V_1$ adalah himpunan bagian dari $V$ dan $E_1$ adalah himpunan bagian dari $E$. Komplemen dari upagraf $G_1$ terhadap graf $G$ ialah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan $V_2$ adalah himpunan simpul yang anggota-anggota $E_2$ bersisian dengan simpul-simpul dalam $V_2$. Komponen graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf $G$.

10. Upagraf Merentang (*Spanning Upagraph*)
Jika upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ mengandung semua simpul dari $G = (V, E)$ atau $V_1 = V$, maka upagraf $G_1$ adalah upagraf merentang dari $G$.

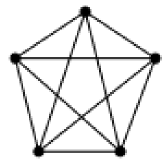
*11. Cut-Set*
*Cut-set* dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang jika dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

12. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)
Graf berbobot merupakan graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot). Nilai bobot pada sebuah sisi bisa bernilai sama ataupun berbeda dengan nilai bobot sisi lainnya.

D. Graf Khusus

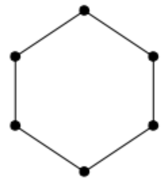
Terdapat beberapa graf khusus, diantaranya adalah:

1. Graf Lengkap
Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya memiliki sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan $n$ buah simpul dilambangkan dengan $K_n$. Jumlah sisi pada graf lengkap adalah $n(n - 1)/2$ dengan $n$ adalah jumlah simpul.



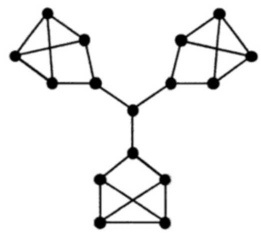
Gambar 2.7 Graf lengkap dengan 5 buah simpul ($K_5$)

2. Graf Lingkaran
Graf lingkaran ialah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan $n$ simpul dilambangkan dengan $C_n$.



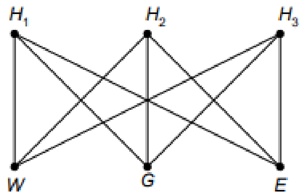
Gambar 2.8 Graf lingkaran dengan 6 buah simpul ($C_6$)

3. Graf Teratur
Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya memiliki derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul adalah $r$, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat $r$. Graf lingkaran adalah graf teratur dengan derajat $r$. Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$ dengan $n$ adalah jumlah simpul.



Gambar 2.9 Contoh graf teratur dengan derajat 3 dan memiliki 16 simpul

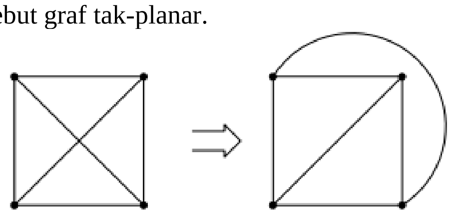
4. Graf Bipartite
Graf bipartite merupakan graf yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian $V_1$ dan $V_2$, sedemikian sehingga setiap sisi pada graf menghubungkan sebuah simpul di $V_1$ ke sebuah simpul di $V_2$. Graf bipartite dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dengan $m$ dan $n$ adalah banyaknya simpul pada himpunan bagianya.




Gambar 2.10 Graf bipartite $K_{3,3}$

## E. Graf Planar dan Graf Bidang

Graf planar (*planar graph*) merupakan graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan). Jika tidak dapat digambarkan, maka grafnya disebut graf tak-planar.



Gambar 2.11 Contoh graf planar pada $K_4$

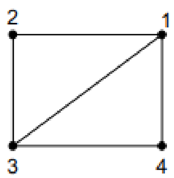
Graf bidang (*plane graph*) merupakan graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan.

## F. Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan Euler (*Eulerian path*) adalah lintasan yang melewati setiap sisi di dalam graf tepat satu kali. Sirkuit Euler (*Eulerian circuit*) adalah sirkuit yang melalui setiap sisi di dalam graf tepat satu kali.

Graf Euler (*Eulerian graph*) merupakan graf yang mempunyai sirkuit Euler. Graf semi-Euler (*semi-Eulerian graph*) adalah graf yang mempunyai lintasan Euler.

Menurut Teorema Euler, Graf tidak berarah memiliki lintasan Euler (graf semi-Euler) jika dan hanya jika terhubung dan memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali. Graf tidak berarah memiliki sirkuit Euler (graf Euler) jika dan hanya jika setiap simpul berderajat genap. Graf berarah memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama. Graf berarah memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.

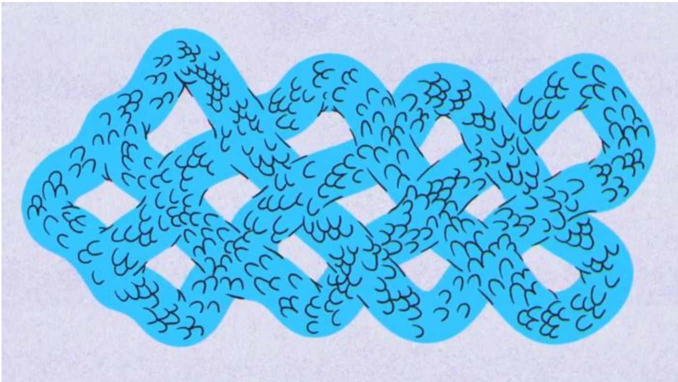



Gambar 2.12 Contoh graf yang memiliki lintasan euler (graf semi-euler)

## III. The Ragnarok Riddle

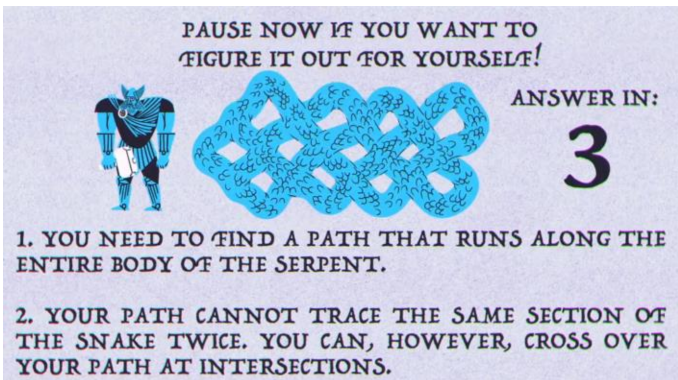
*The Ragnarok Riddle* adalah sebuah teka-teki dari Daniel Finkel yang menceritakan tentang mitologi Nordik. Menurut mitologi Nordik, Ragnarok adalah rangkaian kisah pertempuran yang akan menentukan akhir dunia dewa Nordik.

Pada saat Ragnarok, monster ular besar Jörmungandr muncul dan menelan istana Valhalla. Kemudian ia meliuk-liuk ke seluruh negeri dan menggabungkan tubuhnya menjadi satu tubuh kontinu tanpa kepala dan ekor.



Gambar 3.1 Ilustrasi bentuk tubuh Jörmungandr

Untuk menyelematkan Valhalla, Odin menjelaskan kepada Thor bahwa ia memiliki kekuatan yang cukup untuk menghancurkan Jörmungandr dengan sambaran petir dan palu Mjölnir. Thor akan berlari dengan kecepatan super di sepanjang tubuh ular. Ketika Thor mengangkat palu Mjölnir tinggi-tinggi. Odin akan menyambarnya dengan petir dan membelah bagian tubuh Jörmungandr pada saat itu. Kemudian, Thor harus melanjutkan berlari di sepanjang tubuh Jörmungandr untuk membelah setiap bagiannya. Thor tidak dapat berlari di bagian tubuh yang sudah terbelah atau dia akan jatuh. Tetapi, Thor bisa menyeberangi titik-titik perpotongan tubuh Jörmungandr. Permasalahannya adalah Bagaimana lintasan yang dapat dilalui Thor untuk menghancurkan Jörmungandr.



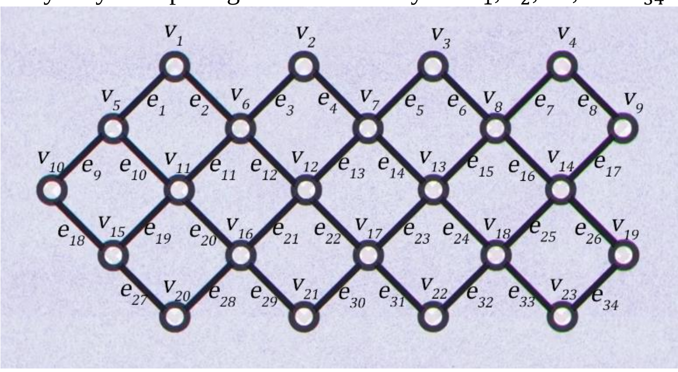

Gambar 3.2 Instruksi pada teka-teki *The Ragnarok Riddle*

## IV. Penggunaan Lintasan Euler

Cara ampuh untuk memecahkan sebuah masalah adalah dengan menyederhanakan masalah tersebut. Pada penyelesaian teka-teki *The Ragnarok Riddle*, permasalahan dapat disederhanakan dengan merepresentasikan bentuk tubuh

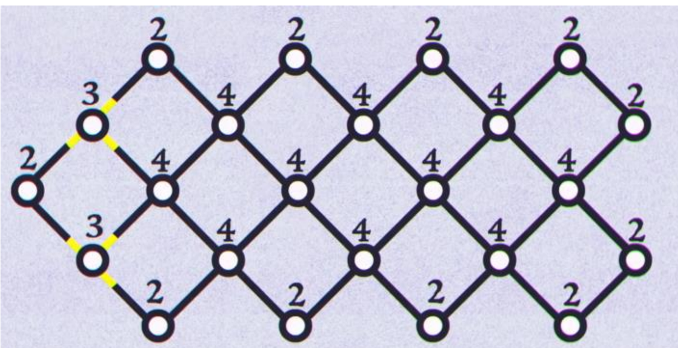
Jörmungandr sebagai graf. Bagian-bagian dari tubuh Jörmungandr direpresentasikan sebagai sisi dalam graf, dan Persimpangan yang menghubungkan bagian-bagian tubuhnya direpresentasikan sebagai simpul dalam graf.

Misalkan graf $G = (V, E)$ adalah graf yang merepresentasikan bentuk tubuh Jörmungandr. Banyaknya simpul pada graf $G$ adalah 23 yaitu $v_1$, $v_2$, …, dan $v_{23}$. Banyaknya sisi pada graf $G$ adalah 34 yaitu $e_1$, $e_2$, …, dan $e_{34}$.




Gambar 4.1 Representasi bentuk tubuh Jörmungandr sebagai graf

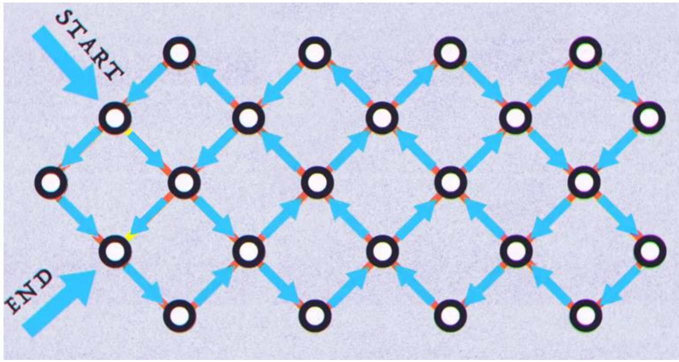
Tinjau sebuah simpul pada graf $G$ yang merepresentasikan bentuk tubuh Jörmungandr, selama Thor berlari di sepanjang tubuh Jörmungandr, Thor akan masuk ke simpul tersebut dan keluar darinya. Artinya simpul tersebut memiliki sepasang sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Jika Thor masuk lagi ke simpul tersebut dan keluar lagi, maka itu menambahkan sepasang sisi lagi pada simpul tersebut. Jadi setiap simpul di sepanjang lintasan Thor akan memiliki dua sisi yang berpasangan, satu sisi pada setiap pasangan berfungi sebagai pintu masuk dan sisi lainnya berfungsi sebagai sebagai pintu keluar. Sehingga jumlah sisi yang berisisian pada setiap simpul haruslah genap kecuali dua simpul, yaitu simpul awal dan simpul akhir. Pada simpul awal, Thor bisa keluar tanpa masuk ke simpul tersebut dahulu yang berarti jumlah sisi yang bersisian dengan simpul awal dapat bernilai ganjil. Pada simpul akhir, Thor bisa masuk ke simpul tersebut tetapi tidak bisa keluar yang berarti juga jumlah sisi yang bersisian dengan simpul akhir dapat bernilai ganjil juga. Hal ini sesuai dengan Teorema Euler pada graf, yaitu graf yang memiliki lintasan euler adalah graf terhubung yang memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali.




Gambar 4.2 Derajat setiap simpul pada graf Jörmungandr

Masing-masing simpul pada graf $G$ yang merepresentasikan bentuk tubuh Jörmungandr memiliki derajat. Pada graf tersebut ada dua simpul yang berderajat ganjil, sedangkan simpul lainnya berderajat genap. Dari gambar 4.1 dan gambar 4.2, dua simpul yang berderajat ganjil tersebut adalah $v_5$ dan $v_{15}$.

Untuk menyelesaikan masalah pada teka-teki ini maka lintasan yang dilalui Thor haruslah berupa lintasan euler. Karena hanya ada dua simpul yang berderajat ganjil, yaitu $v_5$ dan $v_{15}$, maka Thor haruslah memulai larinya dari salah satu diantara simpul $v_5$ dan simpul $v_{15}$, dan berakhir pada satu simpul lainnya.




Gambar 4.3 Salah satu solusi penyelesaian teka-teki *The Ragnarok Riddle*

Misalkan Thor berlari dari simpul awal $v_5$ ke simpul akhir $v_{15}$ dengan lintasan seperti pada gambar 4.3, maka lintasan tersebut adalah salah satu solusi penyelesaian teka-teki *The Ragnarok Riddle*. Jika Thor berlari dari simpul awal $v_{15}$ ke simpul akhir $v_{15}$ dengan lintasan yang berkebalikan dengan lintasan pada gambar 4.3, maka itu adalah solusi yang lain. Jadi, solusi penyelesaian dari teka-teki ini ada banyak asalkan kita tahu harus memulai dari simpul yang mana dan berakhir di simpul yang mana.

## V. Simpulan

Dengan menerapkan salah satu aplikasi graf yaitu lintasan euler dalam penyelesaian teka-teki *The Ragnarok Riddle*, didapat banyak solusi penyelesaiannya, yaitu lintasan harus diawali atau diakhiri dengan simpul berderajat ganjil pada representasi grafnya.

## VI. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan puji syukur dan terima kasih atas kehadirat Tuhan yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah ini yang berjudul "Penggunaan Lintasan Euler pada penyelesaian Teka-teki *The Ragnarok Riddle*" dengan baik. Adapun Penulis membuat makalah ini untuk memenuhi tugas mata kuliah Matematika Diskrit IF2120 Semester 1 2020/2021. Kemudian, Penulis berterima kasih kepada Pak Rinaldi Munir selaku dosen pengajar mata kuliah Matematika Diskrit di K01, yang telah menyediakan waktu dan tenaganya untuk menyampaikan ilmunya kepada mahasiswa di K01. Penulis juga berterima kasih kepada keluarga dan kerabat yang telah memberi dukungan kepada Penulis untuk menyelesaikan makalah ini.

## REFERENSI


[1] Euler, Leonhard (1736). "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". Comment. Acad. Sci. U. Petrop 8, 128–40.

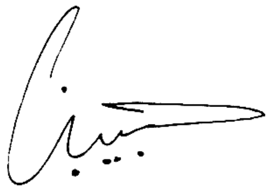
[2] Finkel, Daniel. *Can you solve the Ragnarok riddle – Dan Finkel* diakses melalui *https://ed.ted.com/lessons/can-you-solve-the-ragnarok-riddle-dan-finkel/* pada 9 Desember 2020.

[3] Munir, Rinaldi. *Graf* diakses melalui *http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/matdis20-21.htm#SlideKuliah* pada 9 Desember 2020.


## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Jambi, 11 Desember 2020



Habibina Arif Muzayyan 13519125